Ein Beitrag zur Theorie der freien elastischen Schwingungen von Zylindern und Rohren

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde
genehmigt von der Philosophischen Fakultät
der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin

Von

Ludwig Posener
aus Berlin

Tag der Promotion: 10. Mai 1935
Tag der mündlichen Prüfung: 13. Dezember 1934

1 9 3 5

Johann Ambrosius Barth in Leipzig

73

Referenten: Professor Dr. v. Laue
Professor Dr. Planck

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Sonderdruck aus „Annalen der Physik“ 5. Folge, Band 22, Heft 2. 1935
Printed in Germany

Inhalt: Einleitung. — 1. Dehnungsschwingungen einer dünnen zylindrischen Schale: a) Ableitung der Bewegungsgleichungen; b) Widerlegung eines Einwandes; c) Axialsymmetrische Schwingungen; d) Grenzfälle. — 2. Bemerkungen zur Theorie der symmetrischen Schwingungen eines Vollzylinders: a) Die Pochhammersche Lösung; b) Beweis für die Nichtexistenz einer vollständig separierten Lösung, die alle Randbedingungen erfüllt; c) Entwicklung der Lösung in Fouriersche Reihen nach z; d) Ergänzung der periodischen Lösung. — 3. Zur kopplungstheoretischen Interpretation der elastischen Schwingungen: a) Kraftkopplung und Beschleunigungskopplung; b) Die Kopplungstheorie und die Schwingungen des Vollzylinders.

Einleitung

In einer Reihe von Arbeiten, die in den Jahren 1931—1933 in den Annalen der Physik veröffentlicht worden sind, haben E. Giebe, A. Scheibe und E. Blechschmidt[1]) die freien Schwingungen elastischer Stäbe und Rohre untersucht. Die Schwingungen wurden bei kristallinischem Material (Quarz) piezoelektrisch, bei Nickel- und Eisenstäben magnetostriktiv angeregt, und die Serien der Eigenfrequenzen bis hinauf zu hohen Ordnungszahlen ausgemessen. Es ergab sich eine mit steigender Ordnungszahl zunehmende Abweichung vom Charakter der einfachen harmonischen Schwingungen, wie die Rayleighsche Theorie des „dünnen" Stabes sie fordert. Auch die durch die „Dickenkorrektion" verbesserte Rayleighsche Theorie vermag die Versuchsergebnisse nicht wesentlich besser darzustellen.

Giebe, Scheibe und Blechschmidt versuchten, ihre Ergebnisse in folgender Weise zu deuten: Sie nahmen an, daß die gesamte Energie des schwingenden Gebildes sich auf die zwei bzw. drei Freiheitsgrade in ähnlicher Weise verteilt wie bei den Schwingungen „gekoppelter Systeme". Als schwingende Grundsysteme wurden die Grenzgebilde betrachtet, die bei Vernachlässigung einer bzw. zweier Dimensionen entstehen. So wurde z. B.

1) E. Giebe u. A. Scheibe, Ann. d. Phys. [5] **9**. S. 93. 1931; E. Giebe u. E. Blechschmidt, Ann. d. Phys. [5] **18**. S. 417 u. 457. 1933.

die Schwingung eines zylindrischen Stabes zusammengesetzt aus den Schwingungen eines unendlich dünnen („Rayleighschen") Stabes und denen einer unendlich dünnen Kreisscheibe. Die „Kopplung" kann entweder in der kinetischen oder in der potentiellen Energie oder auch in beiden angenommen werden (Beschleunigungs-, Kraft- oder gemischte Kopplung). Aus experimentellen Gründen entschlossen sich die Verff. zur Annahme einer reinen Beschleunigungskopplung, was auch der modellmäßigen Vorstellung am besten entspricht. Die Theorie gestattete auch, über die auftretenden Kopplungskoeffizienten Aussagen zu machen. Sie werden im wesentlichen von den Elastizitätskonstanten des Materials geliefert.

Mit diesem einfachen Modell gelangt man theoretisch zu einer Doppelserie von Frequenzen, die in nullter Näherung (unendlich dünner Stab) natürlich mit den Rayleighschen übereinstimmen und in erster Näherung die Dickenkorrektion liefern. Im Rahmen der Meßgenauigkeit (etwa 0,1 %) stimmen sie ausgezeichnet mit den gemessenen überein, besonders gut bei dünnen zylindrischen Rohren aus isotropem Material (Eisen oder Nickel), für die Giebe aus seinem Modell die schon von Love[1]) für symmetrische Dehnungsschwingungen angegebene Formel herleiten konnte.

Die hier skizzierte modellmäßige Vorstellung bedarf einer Begründung aus den Grundgleichungen der Elastizitätstheorie. Diese gelingt ohne Schwierigkeiten im Fall des Hohlzylinders und soll im folgenden dargestellt werden. Dagegen gelingt sie nicht im Fall des Vollzylinders, dessen Theorie erheblich komplizierter ist. Bekanntlich ist es bisher nicht gelungen, die strenge Lösung der Grundgleichungen zu finden, die zugleich die Bedingungen der Kräftefreiheit an der Oberfläche befriedigt. Außerdem scheint in diesem Falle die Giebesche Theorie nicht mit der allgemeinen Elastizitätstheorie vereinbar zu sein. Diese Fragen sollen im zweiten Teil der Arbeit untersucht werden. Im ersten Teil wird eine vereinfachte Theorie der Dehnungsschwingungen des Hohlzylinders hergeleitet, die im Gegensatz zu der Darstellung bei Love nicht von flächentheoretischen Hilfsmitteln Gebrauch macht. Der dritte Teil ist einer genaueren Analyse der kopplungstheoretischen Zusammenhänge gewidmet.

1. Dehnungsschwingungen einer dünnen zylindrischen Schale

a) Ableitung der Bewegungsgleichungen

Wir unterscheiden zwei Arten von Schwingungen einer dünnen Schale: Dehnungsschwingungen und Biegungsschwingungen. Unter

1) Love-Timpe, Lehrbuch der Elastizität, Teubner 1907. S. 624.

Dehnungsschwingungen versteht man solche Schwingungen, deren potentielle Energie ausschließlich von den Verzerrungen der Mittelfläche der Schale herrührt, während bei den Biegungsschwingungen die Mittelfläche unverzerrt bleibt, d. h. kein Linienelement dieser Fläche bei der Bewegung seine Länge ändert. Die potentielle Energie dieser Schwingungen rührt also von den Verzerrungen der übrigen Schichten der Schale her, die linear mit der Entfernung von der Mittelfläche wachsen. Ist die Dicke $2h$ der Schale klein, so wird die potentielle Energie der Biegungsschwingungen in erster Näherung quadratisch in h, während die kinetische Energie linear in h wird. Daher müssen die Frequenzen der Biegungsschwingungen von der Dicke der Schale abhängen. Bei den Dehnungsschwingungen trifft das nicht zu: potentielle und kinetische Energie sind von derselben Ordnung in h, und die Frequenzen hängen daher nicht von der Dicke ab[1]).

Zunächst wollen wir die Bedingungen für das Vorliegen reiner Dehnungsschwingungen mathematisch formulieren. Wir rechnen in Zylinderkoordinaten r, φ, z und bezeichnen die Verschiebungen in radialer, azimutaler und axialer Richtung bzw. mit u, v und w, die Komponenten des Deformationstensors mit e_{rr}, $e_{\varphi\varphi}$, e_{zz}, $e_{r\varphi}$, $e_{\varphi z}$, e_{zv} und die des Spannungstensors mit T_{rr}, $T_{\varphi\varphi}$, T_{zz}, $T_{r\varphi}$, $T_{\varphi z}$, T_{zr}.

Dann gelten die Beziehungen[2]):

$$(1)\quad \begin{cases} e_{rr} = \dfrac{\partial u}{\partial r}, & e_{\varphi\varphi} = \dfrac{u}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}, & e_{zz} = \dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ e_{rz} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial r}, & e_{z\varphi} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial v}{\partial z}, & e_{\varphi r} = r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{v}{r}\right) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} \end{cases}$$

und

$$(2)\quad \begin{cases} T_{rr} = \lambda\left(\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{u}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\dfrac{\partial u}{\partial r}, \\ T_{\varphi\varphi} = \lambda\left(\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{u}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial \omega}{\partial z}\right) + 2\mu\left(\dfrac{u}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}\right), \\ T_{zz} = \lambda\left(\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{u}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\dfrac{\partial w}{\partial z}. \\ T_{rz} = \mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial r}\right), \\ T_{z\varphi} = \mu\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right), \\ T_{\varphi r} = \mu\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{v}{r}\right) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\right). \end{cases}$$

---

1) Vgl. auch Love „Dehnungslose Deformationen einer dünnen Schale".
2) Love-Timpe, S. 66.

Man gewinnt sie durch Transformation aus den Ausdrücken für kartesische Koordinaten.

Der Ausdruck für die elastische Energie der Schale lautet in Zylinderkoordinaten:

$$(3)\qquad \left\{ V = \frac{1}{2} \int_{a-h}^{a+h} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{l} (e_{rr} T_{rr} + e_{rz} T_{rz} + e_{r\varphi} T_{r\varphi} + e_{\varphi\varphi} T_{\varphi\varphi} + e_{\varphi z} T_{\varphi z} + e_{zz} T_{zz})\, dt. \right.$$

Ein Linienelement der Mittelfläche $r = a$ verändert seine Länge bei der Bewegung um[1]):

$$e = e_{\varphi\varphi} m^2 + e_{zz} n^2 + 2 e_{\varphi z} m n,$$

wo m und n die Richtungskosinus gegen die Parameterlinien $\varphi = \text{const}$ und $z = \text{const}$ bedeuten. Sollen reine Biegungsschwingungen vorliegen, d. h. sämtliche Längenänderungen verschwinden, so müssen die Deformationsgrößen $e_{\varphi\varphi}$, $e_{\varphi z}$, e_{zz} einzeln verschwinden. Daher ist die Energiedichte der Biegungsschwingungen:

$$f_b = \tfrac{1}{2} (e_{rr} T_{rr} + e_{rz} T_{rz} + e_{\varphi r} T_{\varphi r}).$$

Es liegt die Vermutung nahe, daß der zweite Summand des Integranden in (3) die potentielle Energiedichte der Dehnungsschwingungen darstellt. Diese Vermutung wird durch folgende Überlegung gestützt: Da die Frequenzen der Dehnungsschwingungen von der Dicke der Schale unabhängig sind, kann man diese beliebig dünn machen. An beiden Mänteln gilt nun die Bedingung der Spannungsfreiheit, die das Verschwinden derjenigen Komponenten des Spannungstensors fordert, die einen Index r enthalten. Fordert man nun als „Dünnheitsbedingung", daß diese Randbedingung noch im ganzen Innern der Schale erfüllt ist, so muß identisch gelten:

$$(D)\qquad T_{rr} = T_{r\varphi} = T_{rz} = 0;$$

und die Energiedichte der Dehnungsschwingungen wird:

$$f_D = \tfrac{1}{2} (e_{\varphi\varphi} T_{\varphi\varphi} + e_{zz} T_{zz} + e_{\varphi z} T_{\varphi z}).$$

Im folgenden werden wir uns ausschließlich mit Dehnungsschwingungen beschäftigen.

Aus der Bedingung $T_{rr} = 0$ und Gl. (2) kann man $\partial u / \partial r$ eliminieren

$$(4)\qquad \frac{\partial u}{\partial r} = - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} \right),$$

1) Love-Timpe, S. 64.

so daß wir schließlich erhalten

$$(5)\quad \left\{ f_0 = \frac{1}{2}\left[\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\left(\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + 2\mu\left(\left\{\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right\}^2+\left\{\frac{\partial w}{\partial z}\right\}^2\right)+\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right]. \right.$$

In diesem Ausdruck kann man die Laméschen Elastizitätskonstanten λ und μ ersetzen durch den Youngschen Modul E und die Poissonsche Konstante σ, die eine mehr anschauliche Bedeutung haben. Die kinetische und potentielle Energie des Systems werden dann:

$$(6)\quad \left\{ V_D = \int_{a-h}^{a+h}\int_0^l\int_0^{2\pi}\left\{\frac{E}{2(1-\sigma^2)}\left(\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 - \frac{E}{1+\sigma}\left[\frac{\partial w}{\partial z}\left(\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right]\right\} r\,dr\,d\varphi\,dz, \right.$$

$$(7)\qquad T_D = \int_{a-h}^{a+h}\int_0^l\int_0^{2\pi}\frac{\varrho}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right\} r\,dr\,d\varphi\,dz.$$

Nun muß berücksichtigt werden, daß die Schale sehr dünn sein soll. Beide Energien sind von der Ordnung h. Um die „Flächenenergien" zu erhalten, muß man bilden:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}V(h) = V_f \quad \text{und} \quad \lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}T(h) = T_f.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung kann man die Integration nach r ausführen und erhält als Flächenenergien:

$$8)\quad \left\{ V_f = \int_0^l\int_0^{2\pi}\left\{\frac{E}{2(1-\sigma^2)}\left(\frac{r}{a}+\frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 - \frac{E}{1+\sigma}\left[\frac{\partial w}{\partial z}\left(\frac{u}{a}+\frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial\varphi}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right]\right\} d\varphi\,dz \right.$$

und entsprechend in T_f.

Jetzt sind die Verschiebungen u, v, w nicht mehr als Funktionen von r zu betrachten.

Mit diesen Energien bildet man das Hamiltonsche Integral des Problems, das zum Minimum zu machen ist.

$$(9)\quad \left\{ H = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_0^l\int_0^{2\pi}\left\{\varrho\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right] - \frac{E}{1-\sigma^2}\left(\frac{u}{a}+\frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \frac{2E}{1+\sigma}\left[\frac{\partial w}{\partial z}\left(\frac{u}{a}+\frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial\varphi}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right]\right\} d\varphi\,dz\,dt \right.$$

$$= \text{Min.}$$

Die Eulerschen Gleichungen für dieses Variationsproblem lauten:

$$\text{(I)}\quad \varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{E}{1-\sigma^2}\cdot\frac{1}{a}\left(\frac{u}{a}+\frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{E}{1+\sigma}\frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} \varrho\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{E}{1-\sigma^2}\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{u}{a}+\dfrac{1}{a}\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial w}{\partial z}\right) \\ \qquad -\dfrac{E}{1+\sigma}\left[\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{u}{a}+\dfrac{1}{a}\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}\right)-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{a}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{1}{a}\dfrac{\partial w}{\partial\varphi}\right)\right], \end{cases}$$

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} \varrho\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \dfrac{E}{1-\sigma^2}\cdot\dfrac{1}{a}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{u}{a}+\dfrac{1}{a}\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial w}{\partial z}\right) \\ \qquad -\dfrac{E}{2(1+\sigma)}\left[\dfrac{1}{a}\dfrac{\partial^2 w}{\partial\varphi\,\partial z}-\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right]. \end{cases}$$

b) Widerlegung eines Einwandes

Dieses Verfahren könnte dem Bedenken begegnen, daß hier ohne Berücksichtigung der Nebenbedingungen $T_{rr}=T_{r\varphi}=T_{rz}\equiv 0$ variiert worden ist, denen u, v, w unterliegen. Es ist aber klar, daß u, v, w nach den vorgenommenen Eliminationen und nach der Integration nach r *andere* Funktionen geworden sind als die, die in den Nebenbedingungen auftreten. Der Übergang zur „Flächenenergie" bedeutet auch den Übergang zu einem neuen Variationsproblem, das nun unabhängig von Nebenbedingungen behandelt werden muß.

Man kann unser Verfahren noch auf eine andere Weise rechtfertigen, die in mancher Hinsicht befriedigender ist, aber die Zusammenhänge nicht so deutlich hervortreten läßt. Legt man nämlich den allgemeinen Ausdruck (3) für die elastische Energie zugrunde und betrachtet einen Hohlzylinder *endlicher* Dicke, so erhält man als Hamilton-Integral

$$\text{(10)}\quad \begin{cases} H_1 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{t_0}^{t}\int_{a-h}^{a+h}\int_{0}^{l}\int_{0}^{2\pi}\varrho\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right] \\ \qquad -\left[e_{rr}T_{rr}+e_{\varphi\varphi}T_{\varphi\varphi}+e_{zz}T_{zz}+e_{rz}T_{rz}+e_{z\varphi}T_{z\varphi}+e_{\varphi r}T_{\varphi r}\right] \\ \qquad\qquad \cdot r\,dr\,d\varphi\,dz\,dt. \end{cases}$$

Die Eulerschen Gleichungen dieses Integrals sind die bekannten Bewegungsgleichungen in Zylinderkoordinaten:

$$\text{(11)}\quad \varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial T_{rz}}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial\varphi}-\frac{T_{\varphi\varphi}-T_{rr}}{r}.$$

$$\text{(12)}\quad \varrho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_{\varphi z}}{\partial\varphi}+\frac{\partial T_{zz}}{\partial z}+\frac{T_{rz}}{r}.$$

$$\text{(13)}\quad \varrho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{\varphi r}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{\partial T_{\varphi z}}{\partial z}+\frac{2T_{r\varphi}}{r}.$$

Als Randbedingungen muß man das Verschwinden sämtlicher Spannungen an beiden Mänteln und an den Endflächen verlangen, also:

(14) $T_{rr} = 0, \quad T_{r\varphi} = 0, \quad T_{rz} = 0 \quad \text{für} \quad r = (a - h), (a + h).$

(15) $T_{rz} = 0, \quad T_{\varphi z} = 0, \quad T_{zz} = 0 \quad \text{für} \quad z = 0, l.$

Läßt man jetzt die Dicke $2h$ immer kleiner werden und verlangt, daß mit abnehmendem h auch T_{rr}, $T_{r\varphi}$, T_{rz} gegen Null gehen, so vereinfachen sich die Gleichungen zu

(11′) $$\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \frac{T_{\varphi\varphi}}{r}.$$

(12′) $$\varrho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z}.$$

(13′) $$\varrho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial T_{\varphi z}}{\partial z}.$$

Die Verschiebungen und Spannungen, die in diesen Gleichungen auftreten, sind nur noch als Funktionen von t und z zu betrachten. Ausdrücke wie $\partial u/\partial r$ oder $\partial v/\partial r$, die noch formal in den Spannungsgrößen auftreten, sind durch die Nebenbedingungen (14) zu eliminieren. Dann erhielten wir aus (11′), (12′), (13′) die Bewegungsgleichungen (I), (II), (III) von S. 106.

c) Axialsymmetrische Schwingungen

Zu diesen Gleichungen kehren wir nun zurück. Betrachtet man nur axialsymmetrische Schwingungen, setzt also alle Ableitungen nach φ gleich Null, so lassen sich Dehnungsschwingungen und Rotationsschwingungen trennen; denn die Gl. (I) und (II) enthalten v nicht mehr, und für das letztere liefert Gl. (III):

$$\varrho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{E}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \qquad v = A \cdot \sin p z e^{i\nu t},$$

also die Frequenzen:

$$V = p \sqrt{\frac{E}{2\varrho(1+\sigma)}} = p \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}$$

in Übereinstimmung mit Love-Timpe S. 624. Die Gl. (I) und (II) nehmen die Gestalt an:

(I) $$\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{E}{1-\sigma^2} \frac{1}{a^2} u + \frac{E\sigma}{1-\sigma^2} \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

(II) $$\varrho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{E}{1-\sigma^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{E\sigma}{1-\sigma^2} \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Mit der Randbedingung: Verschwinden von T_{zz} für $z = 0, l$, wo

$$T_{zz} = \frac{E}{1-\sigma^2} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{E\sigma}{1-\sigma^2} \cdot \frac{u}{a},$$

also:

(16) $$\left[\frac{\partial w}{\partial z} + \sigma \frac{u}{a} \right]_{z=0,l} = 0.$$

Die Lösungen der Gl. (I) und (II) können in der Form

$$u = A \cdot \sin p z e^{i\nu t},$$

$$w = -C \cos p z e^{i\nu t}$$

angesetzt werden, wo p durch die Bedingung (16) bestimmt wird. Es ergibt sich:

$$\sin p z \Big|_{z=0,l} = 0 \quad \text{oder} \quad p = \frac{n\pi}{l}.$$

A und C sind durch die folgenden linearen Gleichungen verbunden:

$$\left(\nu^2 - \frac{E}{\varrho(1-\sigma^2)} \frac{1}{a^2}\right) A - \frac{E\sigma}{\varrho(1-\sigma^2)} \cdot \frac{p}{a} \cdot C = 0. \tag{17}$$

$$-\frac{E\sigma}{\varrho(1-\sigma^2)} \cdot \frac{p}{a} \cdot A + \left(\nu^2 - \frac{E}{\varrho(1-\sigma^2)} p^2\right) C = 0. \tag{18}$$

Die Frequenz ν bestimmt sich durch die Determinantengleichung:

$$\begin{vmatrix} \nu^2 - \frac{E}{\varrho(1-\sigma^2)} \cdot \frac{1}{a^2} & -\frac{E\sigma}{\varrho(1-\sigma^2)} \cdot \frac{p}{a} \\ -\frac{E\sigma}{\varrho(1-\sigma^2)} \cdot \frac{p}{a} & \nu^2 - \frac{E}{\varrho(1-\sigma^2)} p^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{19}$$

d) Grenzfälle

Geht man zur Grenze $l \to 0$ über, so erhält man die radialen symmetrischen Schwingungen eines sehr dünnen Kreisringes. Man dividiert die Determinante durch p^2, indem man die zweite Zeile und die zweite Spalte durch p dividiert und geht dann zur Grenze $p \to \infty$ über.

$$\begin{vmatrix} \nu^2 - \frac{E}{\varrho(1-\sigma^2)} \cdot \frac{1}{a^2} & -\frac{E\sigma}{\sigma(1-\sigma^2)} \cdot \frac{1}{a} \\ -\frac{E\sigma}{\varrho(1-\sigma^2)} \cdot \frac{1}{a} & \frac{E}{\varrho(1-\sigma^2)} \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} \nu^2 - \frac{E}{\varrho(1-\sigma^2)} \cdot \frac{1}{a^2} & -\frac{\sigma}{a} \\ -\frac{E\sigma}{\varrho(1-\sigma^2)} \cdot \frac{1}{a} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Daraus erhält man

$$\nu = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{E}{\varrho}}. \tag{20}$$

Die Longitudinalschwingungen eines sehr dünnen Stabes stellen den zweiten Grenzfall dar. Multipliziert man Gl. (I) mit a und läßt a gegen Null gehen, während u/a und $\partial w/\partial z$ endlich bleiben, erhält man:

$$\frac{u}{a} + \sigma \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{21}$$

Dies ist die bekannte Formel für die Kopplung der longitudinalen Schwingungen eines sehr dünnen Stabes mit den transversalen. Die zugehörigen Frequenzen bestimmt man entweder aus der Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{E}{\varrho(1-\sigma^2)} & -\frac{E\sigma}{\varrho(1-\sigma^2)} \cdot p \\ -\frac{E}{\varrho(1-\sigma^2)} p & \nu^2 - \frac{E}{\varrho(1-\sigma^2)} \cdot p^2 \end{vmatrix} = 0.$$

(22) $$\nu = p\sqrt{\frac{E}{\varrho}}$$

oder man geht mit (21) in die Gl. (II) ein und erhält die bekannte Rayleighsche Differentialgleichung:

$$\varrho \frac{d^2 w}{\partial t^2} = E \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

Um die zwischen den Komponenten u und w der symmetrischen Schwingung bestehenden Beziehungen besser übersehen zu können, gehen wir mit dem Ansatz

$$u = U(t) \sin p z,$$
$$w = W(t) \cos p z$$

in die Gl. (I) und (II) ein:

(I) $$\frac{d^2 U}{dt^2} + \frac{E}{\varrho(1-\sigma^2)} \cdot \frac{1}{a^2} U(t) - \frac{E\sigma}{\varrho(1-\sigma^2)} \cdot \frac{p}{a} \cdot W(t) = 0,$$

(II) $$\frac{d^2 W}{dt^2} + \frac{E}{\varrho(1-\sigma^2)} p^2 W(t) - \frac{E\sigma}{\varrho(1-\sigma^2)} \cdot \frac{p}{a} U(t) = 0.$$

Dies sind „Kopplungsgleichungen“ im Wienschen Sinne. Es besteht Kraftkopplung mit den Kopplungskoeffizienten

$$p_{12} = \sigma \cdot a \cdot p, \qquad p_{21} = \frac{\sigma}{a p}.$$

Soll die Kopplung aufgehoben werden, muß $\sigma = 0$ gesetzt werden. Nun steht aber der Kopplungskoeffizient σ auch in den Koeffizienten von U in Gl. (I) und W in Gl. (II), die eigentlich die Frequenzen der Teilsysteme darstellen. Es ist nicht eindeutig entscheidbar, ob auch in diesen Koeffizienten $\sigma = 0$ zu setzen ist oder nicht, d. h. ob

a) $$\omega_1^2 = \frac{E}{\varrho} \cdot \frac{1}{a^2}, \qquad \omega_2^2 = \frac{E}{\varrho} \cdot p^2,$$

oder

b) $$\bar{\omega}_1^2 = \frac{E}{\varrho(1-\sigma^2)} \cdot \frac{1}{a}, \qquad \bar{\omega}_2^2 = \frac{E}{\varrho(1-\sigma^2)} p^2$$

die Teilfrequenzen sind.

Eine genauere Untersuchung der Kopplungstheorie wird lehren, wie diese Frage zu entscheiden ist. Giebe behauptet, daß die

Kopplung reine Beschleunigungskopplung sei und daß eindeutig der Fall a) vorliege. Nun kann man aus den Differentialgleichungen (I) und (II) auf S. 107 ganz einfach zwei äquivalente gewinnen, die durch „Beschleunigungskopplung“ miteinander zusammenhängen. Man setze:

(I′) $$p \cdot I + \frac{\sigma}{a} \cdot II = 0.$$

(II′) $$\sigma \cdot p \cdot I + \frac{1}{a} \cdot II = 0.$$

Also:

(I′) $$\frac{d^2 U}{dt^2} + \frac{E}{\varrho} \cdot \frac{1}{a^2} U + \frac{\sigma}{a p} \frac{d^2 W}{dt^2} = 0.$$

(II′) $$\frac{d^2 W}{dt^2} + \frac{E}{\varrho} p^2 W + \sigma a p \frac{d^2 U}{dt^2} = 0.$$

Setzt man in diesen Gleichungen $\sigma = 0$, so erhält man die Differentialgleichungen der Radialschwingungen des Kreisringes und der Longitudinalschwingungen des dünnen Stabes mit den Frequenzen[1]):

(20) $$\omega_1^2 = \frac{E}{\varrho} \cdot \frac{1}{a^2}.$$

(22) $$\omega_2^2 = \frac{E}{\varrho} \cdot p^2.$$

(Eigenfrequenzen der ungekoppelten Systeme.) Übrigens bekommt man dasselbe, wenn man in Gl. (I) l oder in Gl. (II) $a \to 0$ gehen läßt.

Damit ist Giebes Behauptung bewiesen: Die symmetrischen Schwingungen eines dünnen Rohres können aufgefaßt werden als Schwingungen eines gekoppelten Systems, dessen Grundgebilde ein schwingender Stab und ein symmetrisch schwingender Kreisring sind und bei dem Beschleunigungskopplung mit dem Kopplungsfaktor σ herrscht.

Die Interpretation der unsymmetrischen Schwingungen auf Grund der Giebeschen Theorie scheint unmöglich zu sein. Denn die Integration der Gl. (I), (II) und (III) würde auf eine Säkulargleichung dritter Ordnung für ν^2 führen. Nach Giebe stehen aber als Ausgangssysteme nur der unendlich dünne Stab und der Kreisring zur Verfügung, und man sieht nicht, wie aus der Kopplung dieser beiden Systeme eine Gleichung dritter Ordnung für ν^2 gewonnen werden kann. Selbst wenn man die (unsymmetrischen) Oberschwingungen des Kreisringes hinzunimmt, erhält man zwar mehr Frequenzen, aber immer nur Gleichungen zweiten Grades zu ihrer Bestimmung.

---

1) Vgl. E. Giebe u. E. Blechschmidt, a. a. O., S. 420ff.

2. Bemerkungen zur Theorie der symmetrischen Schwingungen eines Vollzylinders

a) Die Pochhammersche Lösung[1])

Das Problem der symmetrischen Schwingungen von Vollzylindern ist zum ersteumal von L. Pochhammer im Jahre 1876 in Angriff genommen worden. Die Differentialgleichungen des Problems lassen sich unmittelbar aus den allgemeinen Gleichungen für Zylinderkoordinaten entnehmen [Gl. (11), (12), (13), S. 106], wenn man darin alle Ableitungen nach φ gleich Null setzt. Sie lauten:

$$(A)\quad \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \mu \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}\right),$$

$$(B)\quad \varrho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left\{r \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}\right\}.$$

$$(C)\quad \varrho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right).$$

Da v nur in der Gl. (C) auftritt, lassen sich auch hier Torsionsschwingungen und Dehnungsschwingungen trennen. Für die ersteren findet man die vollständige Lösung bei Love S. 334. Das mathematische Problem der Dehnungsschwingungen ist schwieriger, weil es sich um das System der beiden partiellen Differentialgleichungen (A) und (B) handelt mit den Randbedingungen

$$(23)\quad T_{rr} \equiv \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

$$(24)\quad T_{rz} \equiv \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right) = 0$$

} für $r = R$ identisch in z und t.

$$(25)\quad T_{rz} \equiv \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right) = 0$$

$$(26)\quad T_{zz} \equiv \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

} für $z = 0, l$ identisch in r, t.

Pochhammer integriert die Gleichungen durch lineare Kombination einer divergenzfreien und einer rotationsfreien Lösung, und es gelingt ihm, drei der Randbedingungen zu erfüllen. Seine Lösung lautet:

$$(27)\quad u = [A h J_1(hr) + (p J_1(kr)] \sin pz\, e^{i\nu t}.$$

$$(28)\quad w = [-Ap J_0(hr) + B k J_0(kr)] \cos pz\, e^{i\nu t},$$

wo

$$(29)\quad h^2 = \frac{\varrho \nu^2}{\lambda + 2\mu} - p^2, \qquad k^2 = \frac{\varrho \nu^2}{\mu} - p^2$$

---

1) Love, S. 333 u. f.

bedeuten. Die Bedingungen am Mantel ergeben zwei homogene lineare Gleichungen für (A) und (B), die sich nur befriedigen lassen, wenn die Determinante

$$(30)\qquad \begin{vmatrix} (k^2-p^2)J_0(hR)-\frac{2h}{R}J_1(hR), & 2p\,\frac{\partial J_1(kR)}{\partial r}, \\ -2hp\,J_1(hR), & (k^2-p^2)J_1(kR) \end{vmatrix}$$

verschwindet. Das Verschwinden der Normalspannung an den Enden [Bedingung (26)] erfordert $p=\frac{n\pi}{l}$. Damit sind alle Konstanten bestimmt, und es gelingt nicht, gleichzeitig die Schubspannung an den Enden zum Verschwinden zu bringen [Bedingung (25)]. Eigentümlicherweise ist die Frequenz aus den Gl. (29), (30) bereits bestimmt, ohne daß alle Randbedingungen erfüllt sind. Für sehr dünne, lange Stäbe jedoch geht die Pochhammersche Lösung in die richtige über, denn da die Schubspannung am ganzen Mantel verschwindet, kann sie an den Endflächen keine beträchtlichen Werte mehr annehmen. Auch analytisch sieht man das ein, wenn man die in den Lösungen (27), (28) auftretenden Besselschen Funktionen nach Potenzen von r entwickelt und bei der ersten (bzw. zweiten) Ordnung abbricht. Es wird dann

$$\lim_{R\ll l}\frac{U}{R}=-\sigma\,\frac{\partial w}{\partial z},$$

und die Frequenzengleichung geht in die für den unendlich dünnen Stab über.

b) Beweis für die Nichtexistenz einer vollständig separierten Lösung, die alle Randbedingungen erfüllt

Will man untersuchen, warum das Pochhammersche Verfahren nicht zum Ziele führt, so muß man zunächst den Ansatz betrachten: Alles weitere ist dann zwangsläufig. Pochhammer setzt die Funktionen u und w in der Form an:

$$(31)\qquad u=A(r)\,e^{i(\nu t-\gamma z)},\qquad w=B(r)\cdot e^{i(\nu t-\gamma z)}.$$

Dieser Ansatz erscheint willkürlich. Unter allen Umständen muß indessen die Lösung den Zeitfaktor periodisch enthalten; aber in z braucht sie a priori nicht periodisch zu sein. Es läßt sich aber zeigen, daß die Pochhammersche Lösung die einzige ist, die zugleich in allen drei Variablen separiert, die Zeit periodisch enthält und drei der vier Randbedingungen befriedigt. Dies beweisen wir so:

Unter Verwendung der Abkürzungen

$$P=\frac{\partial}{\partial r},\qquad \vartheta=\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}(r\,\dots)$$

lassen sich die Differentialgleichungen (A) und (B) folgendermaßen schreiben, wenn man die Dichte gleich 1 setzt:

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) P\vartheta u + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) P \frac{\partial w}{\partial z}.$$

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \mu \vartheta P w + (\lambda + \mu) \vartheta \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Wir differenzieren Gl. (A) nach z, Gl. (B) nach r und erhalten, nachdem wir

$$\frac{\partial u}{\partial z} = y, \qquad \frac{\partial w}{\partial r} = w', \tag{32}$$

als neue Variable eingeführt haben:

$$\text{(A')} \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) P\vartheta y + \mu \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}.$$

$$\text{(B')} \qquad \frac{\partial^2 w'}{\partial t^2} = \mu P\vartheta w' + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) P\vartheta y.$$

Subtraktion dieser beiden Gleichungen ergibt:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \mu \left(P\vartheta y + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 w'}{\partial t^2} - \mu \left(P\vartheta w' + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} \right). \tag{33}$$

Durch Anwendung des Operators

$$T = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu \left(P\vartheta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

auf Gl. (A') kann w' mit Berücksichtigung der Relation (33) eliminiert werden, und man erhält eine Gleichung vierter Ordnung für y:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial t^4} - (\lambda + 3\mu) \left(P\vartheta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \mu(\lambda + 2\mu) \left(P\vartheta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 y = 0. \tag{34}$$

Diese Gleichung vierter Ordnung kann man folgendermaßen schreiben:

$$\left[\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \left(P\vartheta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] \cdot \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu \left(P\vartheta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] y = 0. \tag{34a}$$

Es wird also auf die unbekannte Funktion y das Produkt zweier vertauschbarer Differentialoperatoren zweiter Ordnung angewandt. Die Lösungen der beiden Gleichungen zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \left(P\vartheta y + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right) = 0, \tag{35}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \mu \left(P\vartheta y + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \right) = 0 \tag{36}$$

sind sicher auch Lösungen von (34). Außerdem könnte noch eine Lösung auftreten, die dem System

$$\text{(Q)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 y'}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \left(P\vartheta y' + \dfrac{\partial^2 y'}{\partial z^2} \right) = 0, \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \mu \left(P\vartheta y + \dfrac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right) = y' \end{cases}$$

genügt (oder umgekehrt).

α) Untersuchen wir zuerst die Gl. (35) und (36). Verlangt man, daß die Lösung separiert ist, d. h. sich in der Form ansetzen läßt:

$$y = f(r) \cdot \varphi(z) \cdot e^{i\nu t} \tag{37}$$

ergibt Gl. (35):

$$\nu^2 f(r) \cdot \varphi(z) + (\lambda + 2\mu)\varphi(z) \cdot P\vartheta f(r) + (\lambda + 2\mu) f(r) \cdot \varphi''(z) = 0,$$

und nach Division durch $f(r) \cdot \varphi(z)(\lambda + 2\mu)$:

$$\frac{\nu^2}{\lambda + 2\mu} = -\frac{P\vartheta f(r)}{f(r)} - \frac{\varphi''(z)}{\varphi(z)}.$$

Die Summe aus einer Funktion von r und einer Funktion von z kann aber nur konstant sein, wenn die Summanden konstant sind:

$$\frac{P\vartheta f(r)}{f(r)} = -h^2; \qquad \frac{\varphi''(z)}{\varphi(z)} = -\gamma^2.$$

Integration dieser beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen liefert:

$$f_1(r) = A \cdot J_1(hr); \qquad \varphi_1(z) \cdot a_1 \cdot \sin(\gamma z + \delta)$$

mit

$$h^2 + \gamma^2 = \frac{\nu^2}{\lambda + 2\mu}.$$

Analog ergibt (36):

$$y_2(r) = B \cdot J_1(kr) \sin(\beta z + \varepsilon)$$

mit

$$k^2 + \beta^2 = \frac{\nu^2}{\mu}.$$

β) Der Fall, daß y dem System (Q) genügt, liefert nichts Neues. Denn aus der ersten Gleichung des Systems folgt:

$$y' = R \cdot J_1(hr) \cdot \sin(\gamma z + \delta).$$

Setzt man dies in die zweite ein, so ergibt sich die inhomogene Differentialgleichung:

$$\nu^2 f(r)\varphi(z) + \mu\varphi(z) \cdot P\vartheta f(r) + \mu f(r)\varphi''(z) = R \cdot J_1(hr) \sin\gamma z. \tag{38}$$

Division durch $f(r) \cdot \varphi(z) \cdot \mu$ liefert:

$$\frac{\nu^2}{\mu} + \frac{P\vartheta f(r)}{f(r)} + \frac{\varphi''(z)}{\varphi(z)} = R \cdot \frac{J_1(hr)}{f(r)} \cdot \frac{\sin(\gamma z + \delta)}{\varphi(z)}.$$

Diese Gleichung ist von der Struktur:

$$\text{const} + \alpha(r) + \chi(z) = \alpha(r) \cdot \beta(z).$$

Differentiation nach r und z gibt:

$$\alpha'(r) \cdot \beta'(z) = 0.$$

Also entweder

$$\alpha'(r) = 0$$

oder

$$\beta'(z) = 0, \qquad \varphi(z) = \sigma \cdot \sin(\gamma z + \delta).$$

Gehen wir mit $\varphi(z) = \sigma \sin(\gamma z + \delta)$ in die Gl. (38) ein, so erhalten wir eine gewöhnliche inhomogene Differentialgleichung für f, deren vollständiges Integral (unter Fortlassung der durch die Natur des Problems ausgeschlossenen Besselfunktionen zweiter Art) lautet:

$$f(r) \sim J_1(hr) + C \cdot J_1(kr).$$

Und dasselbe ergibt sich, wenn wir die andere Alternative $(\alpha'(r) = 0)$ wählen.

Wir haben also:

$$(39) \qquad y = [A \cdot J_1(hr) \sin(\gamma z + \delta) + B \cdot J_1(kr) \cdot \sin(\beta z + \varepsilon)] e^{i\nu t}.$$

w' genügt derselben Gleichung vierter Ordnung (34). Daher gilt:

$$(40) \qquad w' = [E \cdot J_1(hr) \sin(\gamma z + \delta) + F \cdot J_1(kr) \sin(\beta t + \varepsilon \nu) e^{i\nu t}.$$

Durch Integration nach z bzw. r ergeben sich u und w:

$$(39') \qquad u = [C \cdot J_1(hr) \cos(\gamma z + \delta) + D \cdot J_1(kr) \cos(\beta z + \varepsilon) + \alpha(r)] e^{i\nu t}$$

$$(40') \qquad w = [G \cdot J_0(hr) \sin(\gamma z + \delta) + H \cdot J_0(kr) \sin(\beta z + \varepsilon) + \beta(z)] e^{i\nu t}.$$

Die Funktionen $\alpha(r)$ und $\beta(z)$ werden durch die ursprünglichen Differentialgleichungen (A) und (B) bestimmt zu

$$\alpha(r) = M \cdot J_1(\xi r), \quad \beta(z) = N \cdot \cos(\xi z + \omega); \quad \xi^2 = \frac{\nu^2}{\lambda + 2\mu}.$$

Die Randbedingungen am Mantel müssen identisch in z gelten. Dies läßt sich nur erreichen, wenn $M = N = 0$, $\beta = \gamma$, und das führt auf die Pochhammerschen Lösungen.

Damit ist bewiesen, daß die Pochhammerschen Lösungen die einzigen vollständig separierten Lösungen der Differentialgleichungen sind, die drei Randbedingungen erfüllen und daß es somit *keine* vollständig separierte Lösung gibt, die alle vier Randbedingungen erfüllt.

c) Entwicklung der Lösung in Fouriersche Reihen nach z.

Die Lösung muß jedenfalls periodisch in t sein, also von der Form

$$u = A(r, z) \cdot e^{i\nu t}$$
$$w = B(r, z) \cdot e^{i\nu t}.$$

Die Funktionen $A(r, z)$ und $B(r, z)$ dürfen in den Variabeln r und z nicht separiert sein. Der nächste Weg, der sich zu einem allgemeineren Ansatz für A und B bietet, ist die Entwicklung nach einem vollständigen Orthogonalsystem in z. Da die Differentialgleichungen homogen von der zweiten Ordnung in z sind, bietet sich von selbst die Entwicklung in Fourierreihen dar. Die ersten und zweiten Ableitungen

der Funktionen nach z lassen sich dann sicher auch als Fourierreihen darstellen; es ist aber fraglich, ob gliedweises Differenzieren erlaubt ist, da man wohl die Funktionen über ihren Definitionsbereich (Stablänge) hinaus periodisch fortsetzen kann, aber nicht sicher ist, daß diese Fortsetzung stetig und mit stetigen Ableitungen ausgeführt werden kann. Die Bedingung für gliedweises Differenzieren ist die gleichmäßige Konvergenz der Reihe selbst und die Konvergenz der Reihe der Ableitungen. A priori kann man nicht sagen, ob die gesuchten Funktionen diese Bedingung erfüllen.

Die physikalische Bedeutung der stetigen, differenzierbaren, periodischen Fortsetzbarkeit ist diese: Setzt man an den Zylinder einen zweiten gleicher Länge an, so bleiben beide während der Bewegung immer in Berührung, und der Charakter der Schwingung wird nicht gestört. Oder, anders ausgedrückt, die n-te Oberschwingung des Zylinders hat genau dieselben Eigenschaften wie die Grundschwingung eines Zylinders von der Länge l/n. Diese physikalische Vorstellung liegt sowohl der Theorie von Pochhammer als auch der von Giebe zugrunde. Daß die mathematischen Voraussetzungen dafür nicht vorliegen, soll im folgenden gezeigt werden.

Der Einfachheit wegen machen wir die Länge des Zylinders gleich 2π (Anfangspunkt $-\pi$, Endpunkt $+\pi$). Dann lassen sich u und w in der Form ansetzen:

$$u = \sum \alpha_n(r) \cos n z \, e^{i\nu t},$$

$$w = \sum \beta_n(r) \sin n z \cdot e^{i\nu t}.$$

Der reelle Ansatz ist einfacher als der komplexe und bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, zumal für u aus den Gleichungen das Verschwinden der sin-Glieder folgt, wenn w antisymmetrisch in bezug auf $z = 0$ angesetzt wird. Die Differentialgleichungen werden dann:

$$\sum \{(\nu^2 - \mu n^2)\, \alpha_n(r) + (\lambda + 2\mu) P \vartheta \alpha_n(r) + (\lambda + \mu) n \cdot \beta_n'(r)\} \cos n z = 0.$$

$$\sum \{(\nu^2 - (\lambda + 2\mu) n^2)\, \beta_n(r) + \mu \vartheta P \beta_n(r) - (\lambda + \mu) n \vartheta \alpha_n(r)\} \sin n z = 0.$$

Sie haben auch die Gestalt von Fourierreihen; also muß jeder Fourierkoeffizient einzeln verschwinden, d. h. es muß gelten:

$$(\nu^2 - \mu n^2)\, \alpha_n(r) + (\lambda + 2\mu) P \vartheta \alpha_n(r) + (\lambda + \mu) n \beta_n'(r) = 0.$$

$$(\nu^2 - (\lambda + 2\mu) n^2)\, \beta_n(r) + \mu \vartheta P \beta_n(r) - (\lambda + \mu) n \vartheta \alpha_n(r) = 0.$$

Dies sind gewöhnliche Differentialgleichungen für $\alpha_n(r)$ und $\beta_n(r)$. Ihre Lösungen sind dieselben Besselschen Funktionen, die auch in (27), (28) auftreten. Auch diese Methode führt also nicht über

die Pochhammerschen Lösungen hinaus. Daraus ergibt sich, daß u und w nicht als periodische Funktionen in z angesetzt werden können.

d) Ergänzung der periodischen Lösung.

Nun kann man aber jede Funktion, von der Existenz und Stetigkeit bis zur n-ten Ableitung gefordert wird, durch Hinzufügen eines Polynoms von höchstens $(n+1)$tem Grade stetig und periodisch über ein gegebenes Grundintervall hinaus fortsetzen. Man erkennt dies leicht so: Sei y die gegebene Funktion. Dann entsteht durch Hinzufügen einer linearen Funktion die neue Funktion $\chi(z)$, die stetig sei:

$$\chi(z) = y(z) + a + b \cdot z .$$

Die Periodizitätsforderung lautet:

$$y(-\pi) - b\pi = y(\pi) + b\pi .$$

Daraus bestimmt sich b. Das Verfahren kann nach ein- oder mehrfachen Differentiationen fortgesetzt werden. Da wir Ableitungen bis zur zweiten Ordnung brauchen, müssen wir zu u und w Polynome dritten Grades in z hinzufügen. Die so ergänzten Funktionen können dann in Fourierreihen entwickelt und in die Differentialgleichungen eingesetzt werden. Vorher können wir aber noch einige Einschränkungen aus Symmetriebetrachtungen und aus den Randbedingungen für $z = \pm\pi$ herleiten.

$$(53)\quad u = e^{i\nu t}\left[\sum \alpha_n(r)\cos nz + A(r) + B(r)z + C(r)z^2 + D(r)z^3\right].$$

$$(54)\quad w = e^{i\nu t}\left[\sum \beta_n(r)\sin nz + a(r) + b(r)z + c(r)z^2 + d(r)z^3\right].$$

Aus der Konfiguration des Systems geht jedenfalls hervor, daß u symmetrisch in z sein wird. Daraus folgt, daß sich das Polynom $A + Bz + Cz^2 + Dz^3$ auf das quadratische Glied reduziert. Für w wollen wir nichts voraussetzen. Die Bedingungen an den Endflächen müssen für $z = -\pi$ und $z = +\pi$ erfüllt sein. Das ergibt zwei Gleichungspaare:

$$(55)\qquad \pm 2C(r)\cdot\pi + a'(r) \pm b'(r)\cdot\pi + c'(r)\pi^2 \pm d'(r)\pi^3 = 0 .$$

$$(56)\quad \begin{cases} \lambda\left(\sum(-1)^n \vartheta\,\alpha_n(r) + \vartheta\,C(r)\pi^2\right) + (\lambda+2\mu)\left(\sum(-1)^n n\,\beta_n(r)\right. \\ \qquad\qquad \left. + b(r) \pm 2\,c(r)\cdot\pi + d(r)\pi^2\right) = 0 . \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt, daß w eine ungerade Funktion von z ist. Zur Bestimmung der fünf Funktionen α_n, β_n, b, d, C haben wir jetzt vier Gleichungen, die beiden Differentialgleichungen und die beiden Randbedingungen für $z = \pm\pi$. Um das Problem zu einem

bestimmten zu machen, setzen wir $d = 0$, so daß der endgültige Ansatz für u und w lautet:

(53a) $$u = e^{i\nu t}[\sum \alpha_n(r)\cos n z + C(r) z^2].$$

(54a) $$w = e^{i\nu t}[\sum \beta_n(r)\sin n z + b(r) z]^{1}).$$

Die Randbedingungen an den Endflächen fordern:

(55a) $$2C(r) + b'(r) = 0.$$

(56a) $$\sum(-1)^n\left(\lambda\vartheta\alpha_n + (\lambda+2\mu) n\beta_n\right) + \lambda\pi^2\vartheta C(r) + (\lambda+\mu) C(r) = 0.$$

Und die Differentialgleichungen (A) und (B) nehmen die Form an:

$$(A_\alpha)\quad \nu^2(\alpha_n(r)\cos n z + \nu^2 C(r) z^2 + (\lambda+2\mu)\left(P\vartheta\alpha_n(r)\cos n z + P\vartheta C(r) z^2\right) + \mu\left(-n^2\alpha_n(r)\cos n z + 2C(r)\right) + (\lambda+\mu)\left(n\beta_n'(r)\cos n z + b'(r)\right) = 0.$$

$$(B_\alpha)\quad \nu^2\beta_n(r)\sin n z + \nu^2 b(r) z + \mu\left(\vartheta P\beta_n(r)\sin n z + \vartheta P b(r) z\right) + (\lambda+2\mu)\cdot\left(-n^2\beta_n(r)\sin n z\right) + (\lambda+\mu)\left(-n\vartheta\alpha_n(r)\sin n z - 2\vartheta C(r) z\right) = 0.$$

Um diese Gleichungen zu lösen, entwickeln wir ihre linken Seiten in Fourierreihen und setzen jeden Fourierkoeffizienten einzeln gleich Null. Dadurch gewinnt man gewöhnliche Differentialgleichungen von der Form:

$$(A_\beta)\quad \nu^2\alpha_\tau(r) + (-1)^\tau\cdot\frac{4\nu^2}{\tau^2}\cdot C + (\lambda+2\mu)\left(P\vartheta\alpha_n(r) + (-1)^\tau\cdot\frac{4}{\tau^2}P\vartheta C(r)\right) + \mu\left(-\tau^2\alpha_\tau(r)\right) + (\lambda+\mu)\tau\beta_\tau'(r) = 0.$$

$$(B_\beta)\quad \nu^2\beta_\tau(r) + (-1)^{\tau+1}\frac{2}{\tau}\nu^2 b(r) - (\lambda+2\mu)\tau^2\beta_\tau(r) + \mu\left(\vartheta P\beta_\tau(r) + (-1)^{\tau+1}\frac{2}{\tau}\vartheta P b(r) + (\lambda+\mu)(-\tau\vartheta\alpha_\tau(r) - (-1)^\tau\cdot\frac{4}{\tau}\vartheta C(r)\right) = 0.$$

---

1) Physikalisch läßt sich diese Ergänzung so interpretieren: Die stehenden Wellen in dem Zylinder entstehen nicht durch einfache Reflexion an den Endflächen, sondern durch einen komplizierteren Vorgang, der durch die elastischen Eigenschaften des Materials und durch die Spannungsfreiheit am Rande bedingt ist.

Die Knotenflächen der longitudinalen (w-)Schwingung sind nicht äquidistant. Ihre Lagen werden durch die transzendente Gleichung

$$\alpha_n \sin n z + C\cdot z = 0$$

gegeben, also durch den Schnitt der Sinuskurve mit einer schwach geneigten Geraden durch den Ursprung. Ihre Abstände werden nach den Enden des Stabes zu immer kleiner. In analoger Weise werden die Knotenflächen der transversalen (u-)Schwingungen durch die Schnitte der Kosinuskurve mit einer Parabel gegeben. Da b und C für den unendlich dünnen Stab ($R = 0$) verschwinden müssen, können sie auch für Zylinder endlicher Dicke als sehr klein angesehen werden, so daß die Neigung der Geraden und die Krümmung der Parabel im Bereich von $-\pi$ bis $+\pi$ ebenfalls sehr klein sind. Unsere Schwingungen unterscheiden sich dann nur wenig von gewöhnlichen stehenden Wellen.

Gl. (B_β) differenzieren wir nach r

$$(B_\beta')\quad \begin{cases} \nu^2 \beta_\tau' + (-1)^{\tau+1} \cdot \frac{2}{\tau} \nu^2 b'(r) - (\lambda + 2\mu)\tau^2 \beta_\tau'(r) \\ \quad + \mu \left(P\vartheta \beta_\tau'(r) + (-1)^{\tau+1} \cdot \frac{2}{\tau} \cdot P\vartheta b'(r) \right) \\ \quad + (\lambda + \mu) \left(-\tau P\vartheta \alpha_\tau(r) - (-1)^\tau \frac{4}{\tau} P\vartheta C(r) \right) = 0 \end{cases}$$

und gehen mit den Abkürzungen

$$(57)\qquad \alpha_\tau(r) + (-1)^\tau \frac{4}{\tau^2} C(r) = \varepsilon_\tau(r),$$

$$(58)\qquad \beta_\tau'(r) + (-1)^{\tau+1} \cdot \frac{2}{\tau} b'(r) = \tau \cdot \eta_\tau'(r)$$

in die Differentialgleichungen ein. Dann erhalten wir schließlich unter Berücksichtigung der Gl. (55a)

$$(A_\gamma)\quad \begin{cases} \nu^2 \varepsilon_\tau(r) + (\lambda + 2\mu) P\vartheta \varepsilon_\tau(r) - \mu\tau^2 \varepsilon_\eta(r) + (\lambda + \mu)\tau^2 \eta_\tau(r) \\ \quad = (-1)^{\tau+1} \cdot 4\lambda C(r). \end{cases}$$

$$(B_\gamma)\quad \begin{cases} \nu^2 \eta_\tau(r) + \mu P\vartheta \eta_\tau(r) - (\lambda + 2\mu)\tau^2 \eta_\tau(r) - (\lambda + \mu) P\vartheta \varepsilon_\tau(r) \\ \quad = (-1)^\tau \cdot 4(\lambda + 2\mu) \cdot C(r). \end{cases}$$

Dies System kann gelöst werden unter der Voraussetzung, daß C eine reguläre, gegebene Funktion von r ist. Obgleich dies nicht zutrifft, wollen wir vorläufig C als bekannt annehmen. Um das System A_γ, B_γ zu lösen, suchen wir erst die vollständige Lösung des homogenen Systems

$$(A_\gamma^0)\quad \nu^2 \varepsilon_\tau^0(r) + (\lambda + 2\mu) P\vartheta \varepsilon_\tau^0(r) - \mu\tau^2 \varepsilon_\tau^0(r) + (\lambda + \mu)\tau^2 \eta_\tau^0(r) = 0,$$

$$(B_\gamma^0)\quad \nu^2 \eta_\tau^0(r) + \mu P\vartheta \eta_\tau^0(r) - (\lambda + 2\mu)\tau^2 \eta_\tau^0(r) - (\lambda + \mu) P\vartheta \eta_\tau^0(r) = 0,$$

die lautet:

$$(59)\quad \varepsilon_\tau^0 = \alpha_\tau^0 = A_\tau J_1(h_\tau r) + B_\tau Y_1(h_\tau r) + E_\tau J_1(k_\tau r) + D_\tau Y_1(k_\tau r),$$

$$(60)\quad \eta_\tau^0 = \frac{1}{\tau}\beta_\tau'^0 = -A_\tau J_1(h_\tau r) - B_\tau Y_1(k_\tau r) + \frac{k_\tau^2}{\tau}\left(E_\tau J_1(k_\tau r) + D_\tau Y_1(k_\tau r)\right)$$

mit

$$h_\tau^2 = \frac{\nu^2}{\lambda + 2\mu} - \tau^2, \qquad k_\tau^2 = \frac{\nu^2}{\mu} - \tau^2.$$

Das inhomogene Problem wird nach der Methode der Variation der Konstanten behandelt, indem A, B, E, D als Funktionen von r betrachtet werden mit den Nebenbedingungen:

$$(61)\quad A'(r) J_1(hr) + B'(r) Y_1(hr) + E'(r) J_1(kr) + D'(r) Y_1(kr) = 0.$$

$$(62)\quad -A'(r) J_1(hr) - B'(r) Y_1(hr) + \frac{k^2}{\tau^2}\left(E(r) J_1(kr) + D'(r) Y_1(kr)\right) = 0.$$

Gehen wir mit den Ausdrücken

$$(59')\quad \varepsilon_\tau(r) = A(r) J_1(hr) + B(r) Y_1(hr) + E(r) J_1(kr) + D(r) Y_1(kr),$$

$$(60')\quad \eta_\tau(r) = -A(r) J_1(hr) - B(r) Y_1(hr) + \frac{k^2}{\tau^2}\left(E(r) J_1(kr) + D(r) Y_1(kr)\right)$$

in die Differentialgleichungen A_γ, B_γ ein, so erhalten wir

$$(A_\delta)\quad \begin{cases} A'(r)\,J_1'(hr) + B'(r)\,Y_1'(hr) + E'(r)\,J_1'(kr) + D'(r)\,Y_1'(kr) \\ \qquad = (-1)^{\tau+1}\cdot 4\,\lambda\,C(r). \end{cases}$$

$$(B_\delta)\quad \begin{cases} A'(r)\,J_1'(hr) + B'(r)\,Y_1'(hr) - \dfrac{k^2}{\tau^2}\,(E'(r)\,J_1'(kr) + D'(r)\,Y_1'(kr)) \\ \qquad = (-1)^{\tau+1}\,4\cdot(\lambda+2\mu)\,C(r). \end{cases}$$

Diese Gleichungen bestimmen zusammen mit den Nebenbedingungen (61), (62) die Funktionen A, B, E, D. So wird z. B.

$$A'(r) = \frac{\begin{vmatrix} (-1)^{\tau+1}\cdot 4\cdot\lambda C(r) & Y_1'(hr) & J_1'(kr) & Y_1'(kr) \\ (-1)^{\tau+1}\cdot 4\cdot(\lambda+2\mu)C(r) & Y_1'(hr) & -\frac{k^2}{\tau^2}J_1'(kr) & -\frac{k^2}{\tau^2}Y_1'(kr) \\ 0 & Y_1(hr) & J_1(kr) & Y_1(kr) \\ 0 & Y_1(hr) & -\frac{k^2}{\tau^2}J_1(kr) & -\frac{k^2}{\tau^2}Y_1(kr) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} J_1'(hr) & Y_1'(hr) & J_1'(kr) & Y_1'(kr) \\ J_1'(hr) & Y_1'(kr) & -\frac{k^2}{\tau^2}J_1'(kr) & -\frac{k^2}{\tau^2}Y_1'(kr) \\ J_1(hr) & Y_1(hr) & J_1(kr) & Y_1(kr) \\ J_1(hr) & Y_1(hr) & -\frac{k^2}{\tau^2}J_1(kr) & -\frac{k^2}{\tau^2}J_1(kr) \end{vmatrix}}.$$

Die darin auftretenden Determinanten lassen sich wesentlich vereinfachen. Man erhält:

$$A'(r) = (-1)^{\tau+1}\,\frac{4\cdot\left(\lambda\frac{k^2}{\tau^2}+\lambda+2\mu\right)Y_1(hr)\cdot C(r)}{\left(\frac{k^2}{\tau^2}+1\right)\left(J_1'(hr)\,Y'(hr) - J_1(hr)\,Y_1'(hr)\right)}.$$

Der Ausdruck $J_1'(hr)\,Y_1(hr) - J_1(hr)\,Y_1'(hr)$ im Nenner hat den Wert $-\frac{2}{\pi hr}$; also bleibt der Bruch für $r = 0$ endlich, unter der Voraussetzung, daß C regulär ist. Daher existiert sicher — übrigens auch, wenn C logarithmisch unendlich wird —

$$(63)\qquad A(r) = \text{const}\int_0^r \frac{Y_1(h\varrho)\,C(\varrho)}{J_1'(h\varrho)\,Y_1(h\varrho) - J_1(h\varrho)\,Y_1'(h\varrho)}\,d\varrho.$$

Ebenso bestimmen sich die übrigen Koeffizienten. Es wird dann

$$\begin{aligned} \varepsilon_\tau(r) = {} & L_1\int_0^r C(\varrho)\{Y_1(h\varrho)\,J_1(hr) + J_1(h\varrho)\,Y_1(hr)\}\,\varrho\,d\varrho \\ & + L_2\int_0^r C(\varrho)\{Y_1(k\varrho)\,J_1(kr) + J_1(k\varrho)\,Y_1(kr)\}\,\varrho\,d\varrho \\ & + M_1\,J_1(hr) + M_2\,Y_1(hr) + N_1\,J_1(kr) + N_2\,Y_1(kr). \end{aligned}$$

Dabei müssen M_2 und N_2 verschwinden, um die Endlichkeit für $r = 0$ zu garantieren. Die Funktionen α und β werden dann aus den Gl. (57), (58) bestimmt. Diese Ausdrücke haben nur dann einen Sinn, wenn C bekannt ist. Dies ist a priori nicht der Fall. Indessen haben wir in der Gl. (56a) eine Beziehung zwischen α, β, b und C. Um b zu eliminieren, differenzieren wir die Gleichung nach r und erhalten unter Berücksichtigung von (55)

$$a \cdot P\vartheta \cdot C + \sum (b_n \cdot P\vartheta\alpha_n + c_n \cdot \beta_n') = 0. \tag{56b}$$

Nun können die hier auftretenden Differentialausdrücke $P\vartheta\alpha$, $P\vartheta C$ durch wiederholte Anwendung der Gleichungen A_γ, B_γ linear durch ε_τ, η_τ und C ausgedrückt werden:

$$P\vartheta\alpha_\tau = P\vartheta\varepsilon_\tau + (-1)^{\tau+1}\frac{4}{\tau^2} P\vartheta C(r).$$

$$\begin{aligned} P\vartheta\varepsilon_\tau &= a_1\varepsilon_\tau + a_2\eta_\tau + a_3 C(r), \\ P\vartheta C(r) &= b_1 (P\vartheta)^2 \varepsilon_\tau(r) + b_2 P\vartheta\varepsilon_\tau(r) + b_3 P\vartheta\eta_\tau(r) \\ &= b_1 P\vartheta\left(a_1\varepsilon_\tau + a_2\eta_\tau + a_3 C(r)\right) \\ &\quad + b_4 P\vartheta\varepsilon_\tau + b\eta_\tau + b_6 C(r). \\ P\vartheta C(r) &= k_1\varepsilon_\tau + k_2\eta_\tau + k_3 C(r). \end{aligned}$$

Dann nimmt Gl. (56b) folgende Form an:

$$\int_0^r C(\varrho) K(\varrho, r)\, d\varrho + QC(r) + \Phi(r) = 0. \tag{56c}$$

Gleichungen dieser Art heißen Volterrasche Integralgleichungen. Der Kern dieser Gleichungen ist im vorliegenden Falle ausgeartet und symmetrisch, also ist die Gleichung im Prinzip lösbar.

Der hier angegebene Weg zur Lösung des Problems ist gewiß nicht befriedigend, und die rechnerische Durchführung stößt auf große Schwierigkeiten. Doch scheint dadurch wenigstens die Existenz der Lösung bewiesen.

Es bleibt noch zu zeigen, daß die Randbedingungen am Mantel erfüllbar sind. Sie nehmen mit dem Ansatz (53a), (54a) die Form an

$$\begin{cases} \lambda\vartheta\alpha_n(R)\cos nz + \lambda\vartheta C(R) z^2 + \lambda \cdot n \cdot \beta_n(R)\cos nz + \lambda b(R) \\ \qquad + 2\mu\alpha_n'(R)\cos nz + 2\mu C'(R) z^2 = 0. \end{cases} \tag{64}$$

$$-n\alpha_n(R)\sin nz + 2z C(R) + \beta_n'(R)\sin nz + b'(R)\cdot z = 0. \tag{65}$$

Die angewandte Methode wird auch auf diesen Fall übertragen: die linken Seiten werden nach Fourier entwickelt und die Koeffizienten einzeln Null gesetzt. Unter Berücksichtigung der Abkürzungen (57), (58) erhalten wir

$$\begin{aligned} \lambda\left(\vartheta\varepsilon_n(R) + n\beta_n(R)\right) + 2\mu\varepsilon_n'(R) &= 0. \\ -\varepsilon_n(R) + \eta_n(R) &= 0. \end{aligned}$$

Mit (59), (60) und den Nebenbedingungen (61), (62) reduziert sich dies auf eine reine Bestimmung von Konstanten, die ganz ähnlich erfolgt wie bei Pochhammer.

3. Zur kopplungstheoretischen Interpretation der elastischen Schwingungen

a) Kraftkopplung und Beschleunigungskopplung

Im folgenden soll untersucht werden, welche Schlüsse aus unseren Überlegungen im Hinblick auf die Giebesche Interpretation der elastischen Schwingungen als Schwingungen „gekoppelter Systeme" gezogen werden können. Es konnte (S. 109) bewiesen werden, daß die Schwingungsgleichungen eines Hohlzylinders aufgefaßt werden können als Differentialgleichungen gekoppelter Systeme; es konnte aber nicht eindeutig bestimmt werden, welches die schwingenden Grundgebilde sind und ob es sich um „Kraft"- oder „Beschleunigungskopplung" handelt. Es gelingt vielmehr, aus den Gl. (I), (II) auf S. 107 zwei neue Gl. (I'), (II') zu machen, so daß beide Systeme äquivalent sind — sie entsprechen übrigens beide der Gleichung vierter Ordnung:

$$\frac{d^4 U}{dt^4} + \frac{E}{\varrho(1-\sigma^2)}\left(p^2 + \frac{1}{a^2}\right)\frac{d^2 U}{dt^2} + \frac{E^2}{\varrho^2(1-\sigma^2)}\,\frac{p^2}{a^2}\cdot U = 0. \tag{66}$$

Das erste System entspricht einer Kraftkopplung, das zweite einer Beschleunigungskopplung.

Es liegt die Frage nahe, ob man, wenn die Grundgebilde nicht eindeutig gegeben sind, Kraft- und Beschleunigungskopplung eindeutig unterscheiden kann.

Gegeben sei ein System von zwei Freiheitsgraden mit der kinetischen Energie

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}\,\dot{x}_1^{\,2} + 2a_{12}\,\dot{x}_1\,\dot{x}_2 + a_{22}\,\dot{x}_2^{\,2})$$

und der potentiellen

$$V = \frac{1}{2}(c_{11}\,x_1^{\,2} + c_{22}\,x_2^{\,2}).$$

Es liegt also Beschleunigungskopplung vor. Die Bewegungsgleichungen für das System lauten:

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} a_{11}\dfrac{d^2 x_1}{dt^2} + c_{11}\,x_1 + a_{12}\dfrac{d^2 x_2}{dt^2} = 0, \\ a_{22}\dfrac{d^2 x_2}{dt^2} + c_{22}\,x_2 + a_{12}\dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = 0. \end{cases}$$

$$\omega_1^{\,2} = \frac{c_{11}}{a_{11}}, \qquad \omega_2^{\,2} = \frac{c_{22}}{a_{22}} \tag{67}$$

sind die Eigenfrequenzen der ungekoppelten Teilsysteme,

$$\frac{a_{12}}{a_{11}} = k_{12}, \quad \frac{a_{12}}{a_{22}} = k_{21}$$

die Kopplungskoeffizienten. Ihr Produkt $k_{12} \cdot k_{21} = q^2$ bezeichnen wir als Kopplungsfaktor.

Durch Auflösung nach $\frac{d^2 x_1}{dt^2}$ und $\frac{d^2 x_2}{dt^2}$ können die Gleichungen (IV) umgeformt werden in das System:

$$\text{(V)} \qquad \begin{cases} a'_{11} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + c'_{11} x_1 + c'_{12} x_2 = 0, \\ a'_{22} \frac{d^2 x_2}{dt^2} + c'_{22} x_2 + c'_{12} x_1 = 0. \end{cases}$$

Diese stellen ein System mit Kraftkopplung dar. Es ist dabei, wenn die Determinante $a_{11} a_{22} - a_{12}^2$ mit D bezeichnet wird:

$$\text{(68)} \qquad \begin{cases} a'_{11} = \frac{D}{c_{22}}, \quad c'_{11} = \frac{c_{11} a_{22}}{c_{22}}, \quad c'_{12} = -a_{12}, \\ a'_{22} = \frac{D}{c_{11}}, \quad c'_{22} = \frac{c_{22} a_{11}}{c_{11}}, \quad c'_{21} = -a_{12}, \\ \omega'^2_{11} = \frac{c'_{11}}{a'_{11}}, \quad \omega'^2_{2} = \frac{c'_{22}}{a'_{22}}, \quad p'_{12} \omega'^2_{1} = \frac{c'_{12}}{a'_{11}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad p'_{21} \cdot \omega'^2_{2} = \frac{c'_{21}}{a'_{22}}. \end{cases}$$

Der Zusammenhang zwischen den alten Teilfrequenzen und Kopplungskoeffizienten und den neuen ist gegeben durch:

$$\text{(69)} \qquad \omega'^2_{1} = \frac{\omega_1^2}{1 - q^2}, \quad \omega'^2_{2} = \frac{\omega_2^2}{1 - q^2}, \quad p^2 = p'_{12} p'_{21} = k_{12} k_{21} = q^2.$$

Der Kopplungsfaktor ist also eine Invariante, während die Teilfrequenzen *andere* sind als früher. Theoretisch bedeutet der Übergang vom System (IV) zum System (V) eine kanonische Transformation. Dies sieht man leicht ein, wenn man an Stelle der Geschwindigkeiten die Impulse in die Energiefunktion einführt. Sie sind für das System (IV) gegeben durch:

$$p_1 = a_{11} \dot{x}_1 + a_{12} \dot{x}_2,$$
$$p_2 = a_{21} \dot{x}_1 + a_{22} \dot{x}_2.$$

Damit wird die Hamiltonfunktion H:

$$\text{(70)} \qquad 2H = \frac{a_{22}}{D} p_1^2 + \frac{a_{11}}{D} p_2^2 - \frac{2 a_{12}}{D} p_1 p_2 + C_{11} x_1^2 + C_{22} x_2^2.$$

Die kanonischen Gleichungen bleiben invariant, wenn man durch eine Berührungstransformation neue Koordinaten und Impulse X_μ, P_μ einführt.

Man wähle als Transformationsfunktion:

$$F = \sqrt{\frac{c_{11}}{c_{22}}}\, x_1 X_1 - \sqrt{\frac{c_{22}}{c_{11}}}\, x_2 X_2$$

und bilde:

$$p_\mu = \frac{\partial F}{\partial x_\mu}, \quad P_\mu = -\frac{\partial F}{\partial x_\mu},$$

dann wird:

$$p_1 = \sqrt{\frac{c_{11}}{c_{22}}}\, X_1, \qquad p_2 = \sqrt{\frac{c_{22}}{c_{11}}}\, X_2,$$

$$P_1 = -\sqrt{\frac{c_{11}}{c_{22}}}\, x_1 \qquad P_2 = -\sqrt{\frac{c_{22}}{c_{11}}}\, x_2,$$

und die Hamiltonfunktion (70) geht über in:

$$2\tilde{H} = \frac{a_{22} c_{11}}{c_{22}} \frac{1}{D} X_1^2 + \frac{a_{11} c_{22}}{c_{11}} \cdot \frac{1}{D} X_2^2 - \frac{2 a_{12}}{D} X_1 X_2 + c_{22} P_1^2 + c_{11} P_2^2,$$

oder nach (68):

$$2\tilde{H} = c'_{11} \cdot \frac{1}{D} X_1^2 + c'_{22} \cdot \frac{1}{D} X_2^2 + \frac{2 c'_{12}}{D} X_1 X_2 + \frac{D}{a'_{11}} P_1^2 + \frac{D}{a'_{22}} P_2^2.$$

Die Hamiltonschen Gleichungen lauten:

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_\mu} = \dot{X}_\mu; \qquad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial X_\mu} = -\dot{P}_\mu.$$

Das erste System liefert:

$$P_1 = \frac{a'_{11}}{D} \dot{X}_1, \quad P_2 = \frac{a'_{22}}{D} \dot{X}_2, \tag{71}$$

das zweite:

$$\frac{c'_{11}}{D} X_1 + \frac{c'_{12}}{D} X_2 = -\dot{P}_1$$

$$\frac{c'_{12}}{D} X_1 + \frac{c'_{22}}{D} X_2 = -\dot{P}_2$$

oder [unter Berücksichtigung von (71)]:

$$a'_{11} \ddot{X}_1 + c'_{11} X_1 + c'_{12} X_2 = 0,$$

$$a'_{22} \ddot{X} + c'_{22} X_2 + c'_{12} X_1 = 0,$$

und das sind die Differentialgleichungen (V).

Um die allgemeine Theorie auf unseren Fall anwenden zu können, bemerken wir, daß die Systeme IV und V derselben Gleichung vierter Ordnung äquivalent sind:

$$\frac{d^4 x}{dt^4} + \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{1 - q^2} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{1 - q^2} x = 0,$$

wobei jetzt unter ω_1 und ω_2 die „ungestörten“ Teilfrequenzen bei Beschleunigungskopplung zu verstehen sind.

Mit dem Ansatz $x = A \cdot e^{i\nu t}$ erhalten wir die Frequenzgleichung:

$$\nu^4 - \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{1 - q^2}\nu^2 + \frac{\omega_1^2 \cdot \omega_2^2}{1 - q^2} = 0 \tag{72}$$

mit der Lösung:

$$\nu^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4 q^2 \omega_1^2 \omega_2^2}}{2(1 - q^2)}. \tag{73}$$

Giebe betrachtet als Grundsysteme den unendlich dünnen Stab $\left(\text{Longitudinalschwingungen mit der Frequenz } \omega_1 = \frac{\pi k}{l}\sqrt{\frac{E}{\varrho}}\right)$ und den Kreisring $\left(\text{Transversalschwingungen mit der Frequenz } \omega_2 = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{E}{\varrho}}\right)$ und setzt Beschleunigungskopplung mit dem Koeffizienten q an. Als Wert von q ergibt sich die Poissonsche Konstante σ, wie es den Differentialgleichungen (I′), (II′) entspricht.

Den ursprünglichen Gl. (I), (II) entsprechen aber zwei *andere* Grundsysteme mit den Frequenzen

$$\omega_1' = \frac{\pi k}{l}\sqrt{\frac{E}{\varrho(1 - \sigma^2)}} \quad \text{und} \quad \omega_2' = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{E}{\varrho(1 - \sigma^2)}}$$

(S. 109). Können diese Systeme auch physikalisch interpretiert werden?

Setzt man die Eigenfrequenzen ω_1' und ω_2' in die Frequenzengleichung ein, so lautet diese:

$$\nu^4 - (\omega_1'^2 + \omega_2'^2)\nu^2 + \omega_1'^2 \omega_2'^2 (1 - p^2) = 0$$

(p: Kraftkopplungskoeffizient).

Ihre Lösungen sind, wenn ω_1' harmonisch in der Form $\omega_1' = k\alpha_1'$ angesetzt wird:

$$\nu^2 = \frac{k^2 \alpha_1'^2 + \omega_2'^2 \pm \sqrt{(k^2 \alpha_1'^2 - \omega_2'^2) + 4 p^2 k^2 \alpha_1'^2 \omega_2'^2}}{2}.$$

Wir erhalten zwei Serien von Frequenzen. Die erste strebt mit wachsendem k einem Grenzwert zu

$$\nu_{-\,(\max)} = \omega_2' \sqrt{1 - p^2},$$

die zweite ν_+ hat bei $l = \infty$ ein Minimum

$$\nu_{+(\min)} = \omega_2'.$$

Dieses Minimum ist also die Frequenz der Radialschwingung eines unendlich langen Rohres. Sie ist:

$$\omega_2' = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{E}{\varrho(1 - \sigma^2)}}.$$

Einen anderen Grenzfall erhält man für ν_+, wenn man den Radius des Rohres ins Unendliche wachsen läßt. Es wird dann:

$$\lim_{a \to \infty} \nu_+ = k\alpha_1',$$

$k\alpha_1'$ bedeutet also die longitudinale Eigenfrequenz einer an zwei Seiten begrenzten, unendlich dünnen ebenen Platte.

$$\alpha_1' = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{E}{\varrho(1-\sigma^2)}}.$$

Damit ist die Bedeutung von ω_1' und ω_2' aufgeklärt und die Frage von S. 109 beantwortet. Zusammenfassend kann man sagen: Die Schwingungen eines sehr dünnen Hohlzylinders können als Kopplungserscheinung aufgefaßt werden; und zwar kann man als schwingende Grundgebilde ansehen: entweder den unendlich dünnen Stab und den symmetrisch schwingenden Kreisring. Dann herrscht Beschleunigungskopplung ($a = 0$ und $l = 0$); oder das unendlich lange Rohr und die zweiseitig begrenzte ebene Platte ($l \longrightarrow \infty$ und $a \longrightarrow \infty$). Dann herrscht Kraftkopplung.

b) Die Kopplungstheorie und die Schwingungen des Vollzylinders

Wendet man ähnliche Überlegungen auf den Vollzylinder an, so gelangt man zu einem Widerspruch. Giebe und Blechschmidt betrachten auch die Schwingungen des Vollzylinders als Kopplungserscheinung. Als Grundschwingungen werden die radialen, symmetrischen Schwingungen einer dünnen Kreisscheibe und die Longitudinalschwingungen eines unendlich dünnen Stabes betrachtet. Die Eigenfrequenzen sind bzw.

$$\omega_1 = \frac{k\pi}{l}\sqrt{\frac{E}{\varrho}} \quad \text{und} \quad \frac{\zeta}{2\pi R}\sqrt{\frac{E}{\varrho(1-\sigma^2)}}.$$

Dabei genügt ζ der folgenden transzendenten Gleichung:

$$\zeta J_1'(\zeta) + \sigma J_1(\zeta) = 0.$$

Die Frequenzgleichung des Gesamtsystems stimmt formal mit der Gl. (73) überein. Auch hier kann man die Grenzfälle untersuchen, wenn man R oder l unbegrenzt wachsen läßt. Es ergeben sich als Grenzfrequenzen:

$$\alpha = \lim_{l\to\infty} \nu_- = \frac{\omega_2}{\sqrt{1-q^2}}, \qquad \beta = \lim_{R\to\infty} \nu_+ = \frac{\omega_1}{\sqrt{1-q^2}}.$$

β muß mit der Eigenfrequenz der stehenden Schwingungen einer unendlich ausgedehnten, zweiseitig begrenzten Platte von der Dicke l übereinstimmen, α mit der Eigenfrequenz der Radialschwingungen eines unendlich langen Rohres. Aus den Grundgleichungen kann man beide leicht ausrechnen. Sie sind:

$$\alpha = \frac{\xi}{2\pi R}\sqrt{\frac{E(1-\sigma)}{\varrho(1+\sigma)(1-2\sigma)}}, \qquad \beta = \frac{\pi k}{l}\sqrt{\frac{E(1-\sigma)}{\varrho(1+\sigma)(1-2\sigma)}},$$

wobei ξ der transzendenten Gleichung $\xi J_1'(\xi) + \frac{\sigma}{1-\sigma} J_1(\xi) = 0$ genügt.

Daraus folgen die Gleichungen:

$$\zeta \sqrt{1-2\sigma} = \xi (1-\sigma) \sqrt{1-q^2},$$

$$\sqrt{(1-2\sigma)(1+\sigma)} = \sqrt{1-\sigma} \cdot \sqrt{1-q^2},$$

die nur dann gleichzeitig befriedigt werden können, wenn

$$\frac{\zeta}{\xi} = \sqrt{1-\sigma^2}$$

ist. Diese Beziehung geben auch Giebe und Blechschmidt an, aber nur als Näherungswert, während sie eigentlich streng erfüllt sein müßte, wenn Giebes Theorie richtig wäre. Daß sie streng erfüllt ist, ist unmöglich, da die Wurzeln zweier verschiedener transzendenter Gleichungen nicht in einer konstanten Beziehung zueinander stehen können. Die angegebene zahlenmäßige Übereinstimmung muß als zufällig angesehen werden.

Die Frage, in welchem Umfang die kopplungstheoretischen Vorstellungen trotzdem aufrechterhalten werden können, läßt sich ohne explizite Kenntnis der Lösungen der elastischen Gl. (A) und (B) nicht beantworten. Sie scheinen mit diesen Gleichungen nicht vereinbar zu sein, wie aus folgender Überlegung hervorgeht.

Die Kopplungstheorie verlangt, daß die Gl. (A) und (B) etwa auf folgende Form gebracht werden können:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{E}{1-\sigma^2} P \vartheta u + k_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - E \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + k_{21} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Denn hebt man in diesen Gleichungen die Kopplung auf, so ergeben sich die Differentialgleichungen für die Schwingungen der Kreisscheibe bzw. des dünnen Stabes.

Nun kann man die Gl. (A) und (B) nicht auf diese Form bringen, sondern nur — in ziemlich künstlicher Weise — auf die Form:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{E}{1-\sigma^2} P \vartheta y - \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\sigma}{1-\sigma} P \vartheta \right) T_{rz} - \frac{\sigma}{1-\sigma} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - E \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - P \vartheta T_{rz} - \frac{\sigma(1+\sigma)}{1-\sigma} \frac{\partial^2 T_{rr}}{\partial_r \partial z} - \sigma_r \vartheta \frac{\partial T_{rr}}{\partial z} + \sigma_r \vartheta \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

$$\left[v = \frac{\partial w}{\partial r}; \quad y = \frac{\partial u}{\partial z} \right]$$

Es bleiben also noch Differentialausdrücke in den nicht verschwindenden Spannungen T_{rr} und T_{rz} übrig.

Setzt man übrigens in diesen Gleichungen die Spannungen T_{rz} und T_{rr} gleich Null, so ergeben sich die Differentialgleichungen des Rayleighschen Stabes bzw. der Kreisscheibe.

Das wichtigste Argument gegen die Deutung von Giebe ist jedoch die früher bewiesene Tatsache, daß stetige, periodische und differenzierbare Fortsetzung der Lösung der Grundgleichungen über den Stab hinaus nicht möglich ist, daß also die n-te Oberschwingung des Stabes *nicht* identisch ist mit der Grundschwingung eines Stabes von der Länge l/n.

Zusammenfassend muß gesagt werden, daß die Anwendung kopplungstheoretischer Vorstellungen auf den schwingenden Vollzylinder auf einen Widerspruch führt und außerdem in den allgemeinen Gleichungen der Elastizitätstheorie keine Rechtfertigung findet.

Meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. v. Laue, möchte ich auch an dieser Stelle für die Anregung zu dieser Untersuchung und für sein förderndes Interesse und seinen Rat herzlichst danken.

Lebenslauf

Ich wurde am 20. Februar 1902 als Sohn des Kunstmalers Moritz Posener in Berlin geboren und bin Jude. Meine Schulbildung erhielt ich auf dem Realgymnasium zu Berlin-Lichterfelde, wo ich im März 1920 die Reifeprüfung bestand.

Dann studierte ich drei Semester Geschichte, Philosophie und Nationalökonomie in Berlin und Heidelberg bei folgenden Herren Professoren:

E. Lederer, Fr. Meineke, Eduard Meyer, Riehl, Spranger, Alfred Weber, Breysig.

Von Oktober 1921 bis Ostern 1925 hörte ich in Berlin mathematische, physikalische und philosophische Vorlesungen bei den Herren Professoren:

Bieberbach, Einstein, Grunmach, Ladenburg, v. Laue, v. Mises, Paschen, Planck, Pringsheim, Rademacher, Rubens, Erhard Schmidt, Schur, Szegö, Wehnelt.

Mein Hauptinteresse galt der theoretischen Physik. Doch wurde ich am Abschluß meiner Studien durch eine Gallenerkrankung gehindert. Im Juni 1927 bestand ich die wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen und nach zweijähriger Ausbildung als Studienreferendar die Pädagogische Prüfung. Von 1929 bis 1933 war ich als Studienassessor an mehreren höheren Schulen beschäftigt. Auf Grund des Gesetzes zur Wiederherstellung des Berufsbeamtentums wurde ich im Sommer 1933 in den Ruhestand versetzt. Seitdem arbeitete ich unter Leitung meines verehrten Lehrers, Prof. v. Laue, an meiner Dissertation über elastische Schwingungen. Den Kontakt mit der wissenschaftlichen Forschung habe ich durch den Besuch von Vorträgen und Seminarübungen immer aufrechterhalten.

Berlin, 1. Dezember 1934.

Ludwig Posener.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig 37/35